f est une fonction paire ($f(-x)=f(x)$).
On étudie f sur IR^*_+

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

a)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-1}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

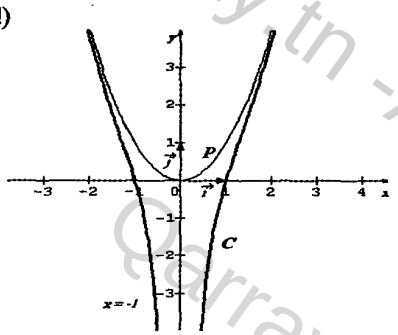
C admet une BIP au *Voisinage de* $-\infty$ *de direction* $(o\vec{j})$

b) P: $y=x^2$

c) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(f(x)-x^2)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}x^2-\frac{1}{x^2}-x^2=0$

Au voisinage de l'infinie C se comporte comme P donc elle admet deux branches paraboliques infinies de direction $(O,\vec{j})$

d)



Exercice n° 11

a) $Df=IR$

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}=f(2)$

Donc f est continue à gauche en 2

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2}{x+1}=\frac{4}{3}=f(2)$

Donc f est continue à droite en 2

Conclusion : f est continue en 2

b) • $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{3}(x^3-3x-2)}{x-2}$$

On va factoriser l'expression x^3-3x-2
On sait que 2 est une racine de : $x^3-3x-2=0$
Donc $x^3-3x-2=(x-2).(x^2+ax+b)$
$=x^3+(a-2)x^2+(b-2a)x-2b$
Par identification on trouve : a = 2 et b = 1 ,d'où :

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{3}(x^3-3x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{3}(x-2)(x^2+2x+1)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{3}.(x+1)^2=3$$

Donc f est dérivable à gauche en 2 et on a : $f'_g(2)=3$

• $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\frac{x^2}{x+1}-\frac{4}{3}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\frac{x^2-4x-4}{3(x+1)}}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x^2-4x-4}{3(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(3x+2)(x-2)}{3(x-2)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x+2}{3(x+1)}=\frac{8}{9}$$

Donc f est dérivable à droite en 2 et on a : $f'_d(2)=\frac{8}{9}$

Conclusion : f n'est pas dérivable en 2
Interprétation : Au point A(2 ;$f(2)$) Cf Possède :
* une demi –tg à gauche de Coefficient directeur 3
* une demi -tg à droite de Coefficient directeur $\frac{8}{9}$
(Le point A(2 ;$f(2)$) est un point anguleux.

a) On a pour $x\geq 2$:

$$ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+c}{x+1}$$

$$\frac{ax^2+(a+b)x+c}{x+1}=f(x)=\frac{x^2}{x+1}\Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\a+b=0\\b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=1\end{cases}\text{ et } c=-2$$

Donc $\boxed{f(x)=x-1+\frac{1}{x+1}}$

b) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$

Au voisinage de $+\infty$:C_f admet la droite D d'équation : y = x + 1 comme asymptote oblique

• $f(x)-(x-1)=\frac{1}{x+1}>0$ pour $x\geq 2$ donc

C_f est au dessus de D sur $[2;+\infty[$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=+\infty$

Au voisinage $-\infty$ C_f admet une branche infinie parabolique de direction $(O,\vec{j})$

Qarray.tn -Aqra Black- Qarray.tn